CONCOURS D'ENTREE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 22 avril 1991

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures - coefficient : 6

N.B : On signale aux candidats que la notation tiendra compte du soin et de la clarté de la rédaction.
On s'efforcera de traiter les questions dans l'ordre.
Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel normé, dont la norme est notée $\| \ \|$.

Si u et v sont deux éléments de E, le segment $[u,v]$ est l'ensemble des vecteurs $tu + (1-t)v$, où t est un réel tel que $0 \leq t \leq 1$.
C étant une partie de E, C est dite convexe si et seulement si, pour tout couple (u,v) d'éléments de C, le segment $[u,v]$ est contenu dans C.

**Partie I :**

1°) Soit C une partie convexe de E, n un entier tel que $n \geq 2$.
Montrer que :

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in C^n, \forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (R_+)^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

la combinaison linéaire : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ est un élément de C.

2°) Dans cette question, n est un entier strictement positif, et $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ un n-uplet d'éléments de E, fixé.

a) Montrer que l'ensemble des vecteurs égaux à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, où les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des réels positifs ou nuls, vérifiant $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, est une partie convexe de E, qu'on notera $C_0$.

$C_0$ est appelée enveloppe convexe de la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.
Cette definition sera utilisee dans la suite du problème

b) Montrer que l'enveloppe convexe de $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est la plus petite partie convexe de E contenant $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

3°) Exemples :
E est l'espace vectoriel $R^2$ muni de la base canonique, composée des vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

a) Déterminer l'enveloppe convexe des vecteurs (-1, 2), (-1, -1), (-1, 3), (1, 1). On fera une figure et on justifiera la réponse.

b) Déterminer l'enveloppe convexe des vecteurs (1, -2), (-2, -3), (1, 1), (-1, 0). Là encore, on fera une figure et on justifiera avec soin la réponse.

4°) Dans cette question, n est un entier fixé, tel que $n \geq 2$, E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire sera noté $(\ |\ )$. La norme utilisée sur E est la norme euclidienne associée.
Soit a un vecteur fixé de E, c un réel fixé.
Montrer que les ensembles H, F, G dont les définitions suivent, sont convexes.

$$H = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } (a|x) = c\}$$

$$F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } (a|x) \geq c\}$$

$$G = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } (a|x) > c\}$$

5°) Dans cette question, E est un espace vectoriel réel normé quelconque.

a) C étant une partie convexe de E, montrer que l'adhérence $\overline{C}$ de C est convexe.

b) C étant une partie convexe de E, montrer que l'intérieur $\mathring{C}$ de C est convexe.

**Partie II :**

C étant une partie convexe non vide de E, un élément x de C est appelé point extremal de C si et seulement si il n'existe aucun couple (u,v) d'éléments de C et aucun réel $t \in ]0, 1[$ tels que : $u \neq v$, et $x = tu + (1-t)v$

1°) Soient u et v deux éléments de E. Quels sont les points extremaux du segment $[u,v]$ ?

2°) Dans cette question, E est l'espace vectoriel $R^2$, muni de la base canonique, et C est l'ensemble des vecteurs (x,y) tels que $x^2 + y^2 \leq 1$.

a) Vérifier que C est convexe.

b) Déterminer les points extremaux de C.

**Tournez la page S.V.P.**

3°) E est un espace vectoriel réel normé quelconque, n un entier strictement positif.

Soient $u_0, u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E tels que les vecteurs $u_1 - u_0$, $u_2 - u_0$, ..., $u_n - u_0$ soient linéairement indépendants. C est l'enveloppe convexe de $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$. Montrer que les points extremaux de C sont $u_0$, $u_1, \dots, u_n$.

4°) Dans cette question, n est un entier, tel que $n \geq 2$, et E est l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{ij})$ tels que : $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_{ij} \geq 0$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$$

a) Montrer que C est une partie convexe de E, stable pour le produit des matrices.

b) Soit A une matrice élément de C, de coefficients $(a_{ij})$. Montrer que s'il existe un couple d'indices (i,j) tel que $0 < a_{ij} < 1$, A n'est pas un point extremal de C.

c) En déduire l'ensemble des points extremaux de C.

d) Soit A une matrice élément de C, inversible, et dont l'inverse appartient à C. Montrer que A est un point extremal de C.

e) Réciproquement, montrer que tout élément extremal de C est une matrice inversible, dont l'inverse appartient à C. En déduire l'ensemble des matrices inversibles de C dont l'inverse est dans C.

## Partie III :

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension finie n, tel que $n \geq 2$. Le produit scalaire pourra être noté ( | ).

C étant une partie convexe, fermée, non vide de E, u étant un vecteur de E, on définit la distance de u à C, notée d(u,C), par : $d(u,C) = \inf_{x \in C} \|u-x\|$.

On pourra noter d cette distance pour abréger.

Dans les questions 1°), 2°), 3°), u désignera un vecteur fixé. La partie C convexe, fermée, non vide de E est, sauf indication contraire, fixée dans toute cette partie.

1°) Soient x et y deux éléments de E. Montrer que :

$$\|x-y\|^2 = 2\|x-u\|^2 + 2\|y-u\|^2 - 4\|(x+y)/2 - u\|^2. \qquad (1)$$

2°) Montrer que, pour tout couple (x,y) d'éléments de C,

$$\|x-y\|^2 \leq 2\|x-u\|^2 + 2\|y-u\|^2 - 4d^2, \text{ où } d = d(u,C).$$

3°) a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)$ d'éléments de C telle que :

$$\|x_n - u\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} d = d(u,C)$$

b) Montrer que la suite $(x_n)$ est une suite de Cauchy.

c) Montrer qu'il existe un unique vecteur x de C tel que : $\|x-u\| = d(u,C)$

On vient d'établir que, si u est un vecteur de E, il existe x unique dans C tel que : $\|x-u\| = d(u,C)$

On pose $x = \text{proj}_C(u)$, et on appelle projection sur C l'application qui à u associe x. Cette définition est valable pour toute la suite.

4°) Dans cette question, u n'appartient pas à C, et on pose $x = \text{proj}_C(u)$.

Soit y un élément de C. En remarquant que :

$\forall t \in [0,1]$, $\|x-u\| \leq \|(1-t)x + ty - u\|$, montrer que :

$$(y-x|x-u) \geq 0 \qquad (2)$$

Réciproquement, montrer que si x est un élément de C, tel que $\forall y \in C$, $(y-x|x-u) \geq 0$, alors : $x = \text{proj}_C(u)$.

5°) Dans cette question, C est un sous espace vectoriel de E.

a) Vérifier que C est convexe et fermé.

b) Montrer que la projection sur C définie en III 3°) est la projection orthogonale sur C.

6°) C désigne toujours une partie convexe, fermée, non vide de E, et u est un élément de la frontière de C.

On appelle $(u_n)$ une suite de vecteurs n'appartenant pas à C, tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|u - u_n\| < 1/n$

a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un vecteur $x_n$ de C, et un vecteur unitaire $v_n$ tels que : $\forall y \in C$, $(y-x_n|v_n) \geq 0$

b) Montrer que, de la suite $(v_n)$, on peut extraire une sous-suite convergente $(v_{\varphi(n)})$, dont on appellera la limite v.

c) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire v de E tel que : $\forall y \in C$, $(y-u|v) \geq 0$

FIN DE L'ENONCE